ZORRO

Profesor
Edson Curahua

PITAGORAS
ACADEMIA

GEOMETRÍA

GRUPO PITÁGORAS

CLASE 12: DIEDROS Y TRIEDROS

ÁNGULO DIEDRO

DEFINICIÓN Y ELEMENTOS

PLANOS PERPENDICULARES

PROPIEDADES

ÁNGULO TRIEDRO

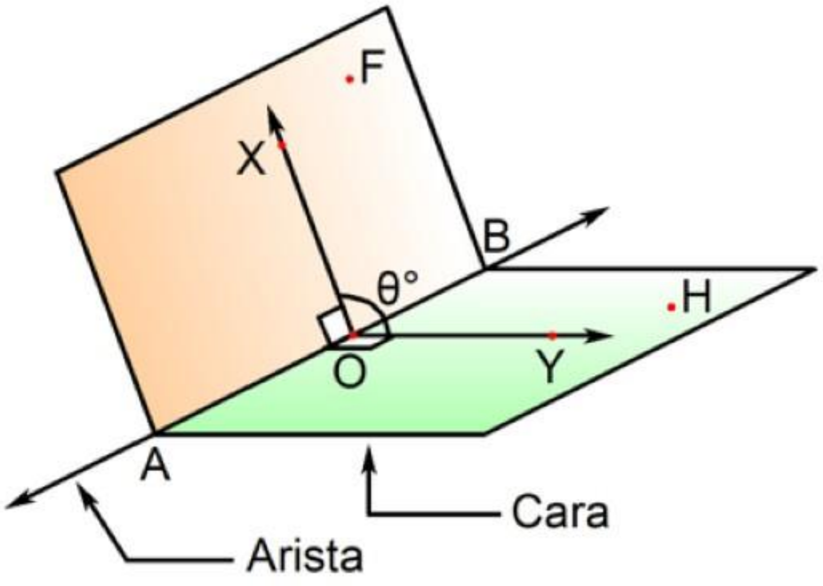
ELEMENTOS, PROPIEDADES Y CLASIFICACIÓN

TRIEDRO POLAR O SUPLEMENTARIO

ÁNGULO DIEDRO

DEFINICIÓN

Un ángulo diedro es la reunión de una recta y dos semiplanos no coplanarios que tienen dicha recta en común como origen. La recta se llama arista del diedro y la reunión de la arista con cualquiera de los semiplanos, es una cara del ángulo diedro.



NOTACIÓN

Ángulo diedro F-AB-H, o simplemente diedro AB.

ÁNGULO PLANO O ÁNGULO RECTILÍNEO

$\angle XOY$: ángulo plano o rectilíneo del ángulo diedro.

MEDIDA DEL ÁNGULO DIEDRO

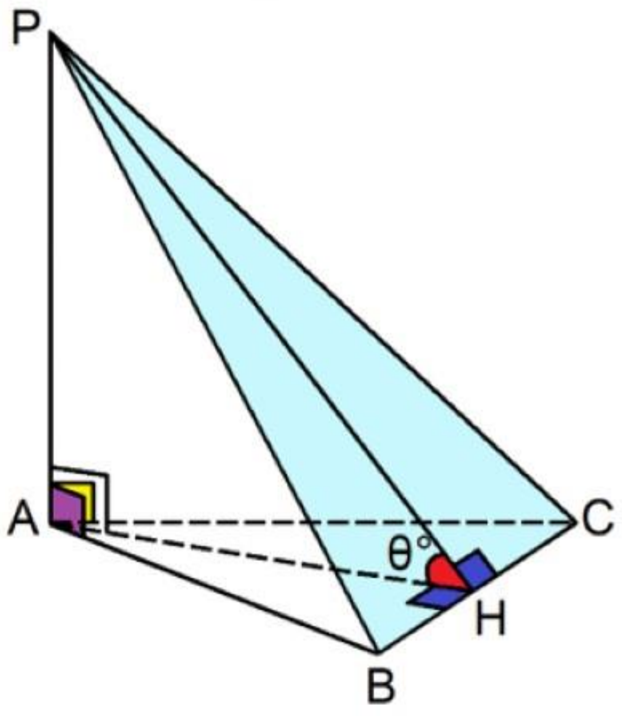
La medida de un ángulo diedro estará dada por la medida de su ángulo rectilíneo.

$$\boxed{\text{mDiedroAB} = \theta}$$

ÁNGULO DIEDRO

NOTA:

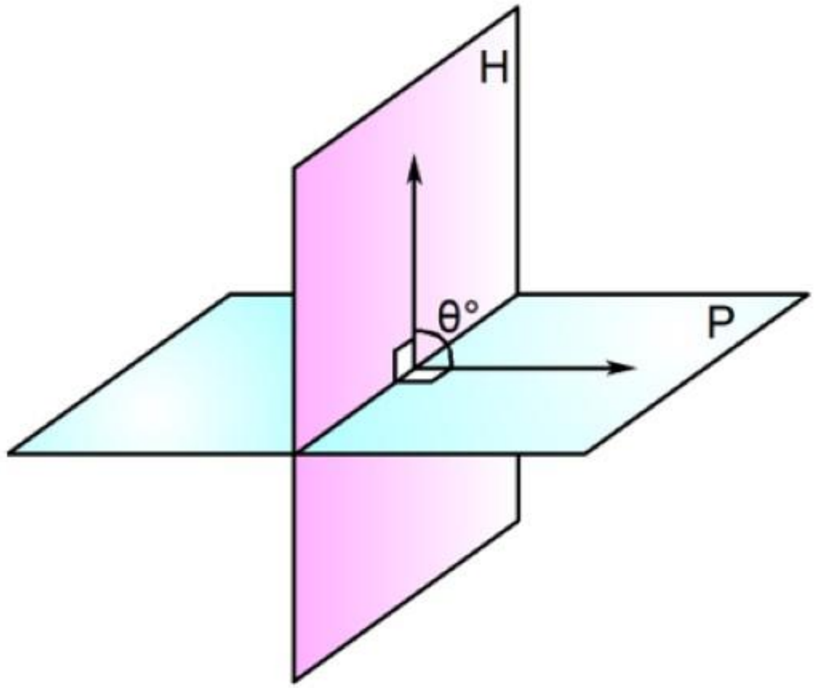
En el siguiente gráfico, con ayuda del teorema de las tres perpendiculares, hemos ubicado el ángulo rectilíneo del diedro BC.



$$\text{mDiedroBC} = \theta$$

PLANOS PERPENDICULARES

Dos planos son perpendiculares si determinan un diedro que mide 90.



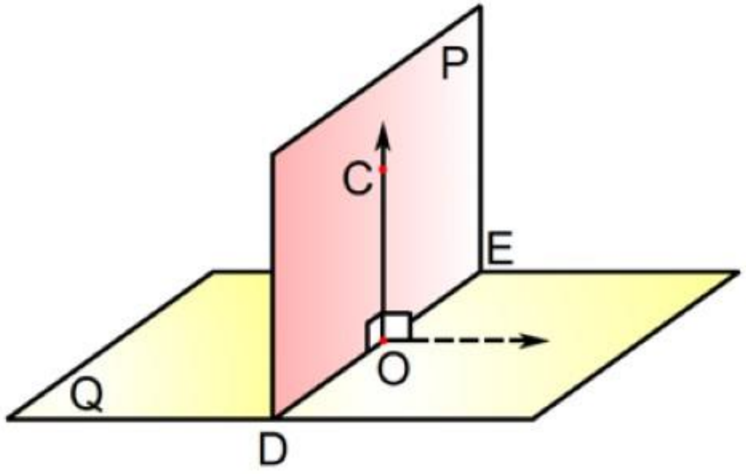
En la figura mostrada: si θ=90, entonces:

$$\square R \perp \square S$$

ÁNGULO DIEDRO

TEOREMAS

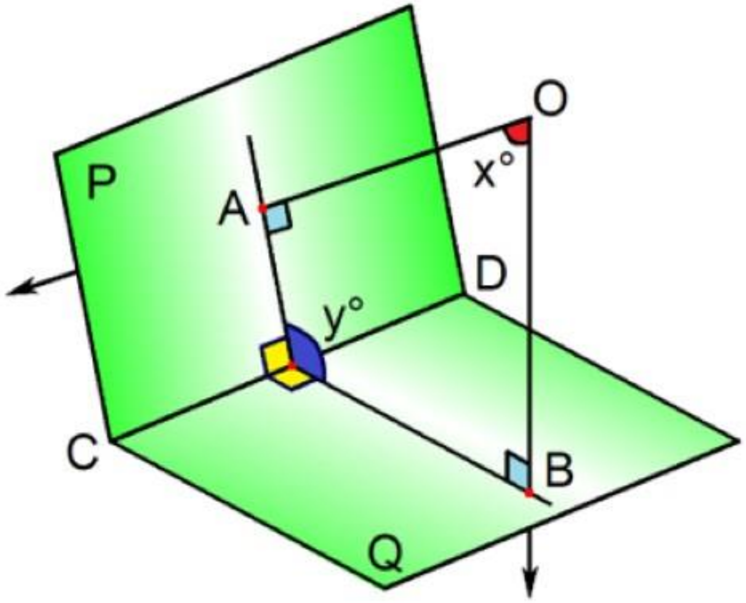
01. Si una recta es perpendicular a un plano, entonces todo plano que contenga a la recta será perpendicular al plano dado.



En el gráfico $\overleftrightarrow{OC}$ es perpendicular al plano Q en el punto O y P es un plano cualquiera que contiene a $\overleftrightarrow{OC}$, entonces:

$$\square P \perp \square Q$$

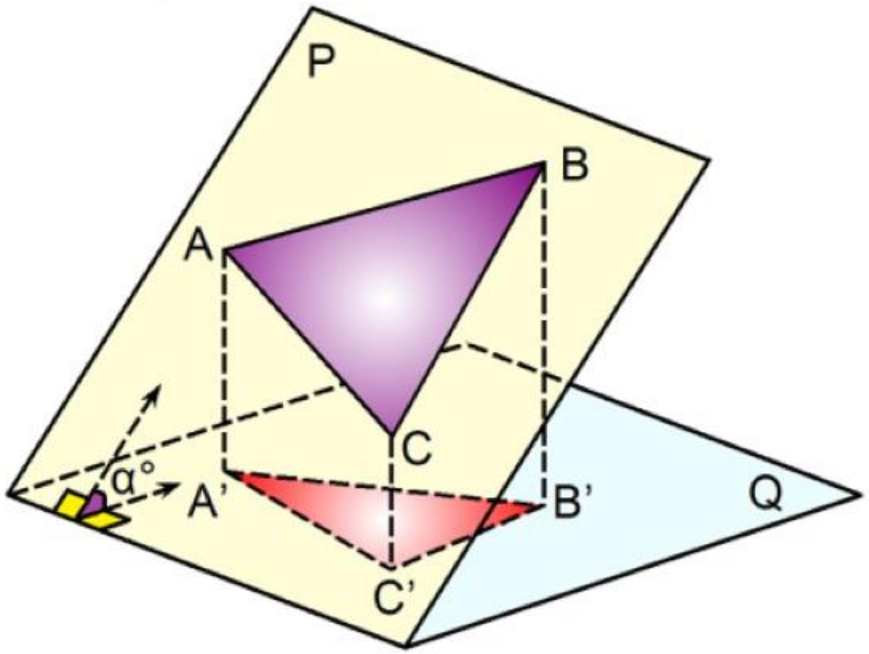
02. Si desde un punto interior a un ángulo diedro se trazan dos rayos perpendiculares a las caras, se cumplirá que el ángulo formado y el ángulo plano del diedro son suplementarios.



$$x + y = 180$$

ÁNGULO DIEDRO

03. El área de la proyección de una región triangular sobre un plano, es igual al área de dicha región multiplicada por el coseno del diedro que forman el plano del triángulo proyectante y el plano de proyección.



$$S_{A'B'C'} = (S_{ABC}).\cos\alpha$$

En la figura α es la medida del diedro que forman los planos P y Q.

En general el área de la proyección de una región plana cualquiera sobre un plano, es igual al área de dicha región multiplicada por el coseno del diedro que forman el plano del dicha región y el plano de proyección.

ÁNGULO DIEDRO

Ejemplo

En un ángulo diedro, las distancias de un punto interior a las caras y a la arista son $4\sqrt{2}$, 4 y 8 respectivamente. Calcular la medida del ángulo diedro.

A) 65 B) 70 C) 75

D) 80 E) 85

Ejemplo

Se tiene un triángulo equilátero ABC de lado igual a 8. Por el vértice B se levanta la perpendicular BR=$4\sqrt{3}$ al plano del triángulo. Calcular la medida del ángulo diedro formado por los planos ABC y ARC.

A) 45 B) 30 C) 60

D) 37 E) 53

ÁNGULO DIEDRO

Ejemplo

Sea ABC un triángulo equilátero cuyo ortocentro es M, AB=18. Desde M se levanta una perpendicular $\overline{\mathrm{MD}}$ al plano del triángulo ABC, tal que $\mathrm{MD} = 3\sqrt{3}$. Calcular la medida del diedro formado por ABC y ABD.

A) 18,5 B) 45 C) 30
D) 60 E) 22,5

Ejemplo

Un cuadrado ABCD y un triángulo equilátero ABE están contenidos en planos perpendiculares. Si AB=6, calcular la distancia entre el centro del cuadrado y el baricentro del triángulo.

A) 2 B) $3\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{3}$

ÁNGULO DIEDRO

Ejemplo

Se tienen los triángulos equiláteros ABC y ABD cuyos lados miden $4\sqrt{3}$, tal que el diedro AB mide 60. Calcular la distancia entre los baricentros de dichos triángulos

A) 1 B) 3 C) 2

D) 1,5 E) $2\sqrt{3}$

Ejemplo

Dos rectángulos ABCD y ABEF forman un ángulo diedro que mide 120. Calcular FC, si AF=BC=2 y CD=6.

A) $3\sqrt{6}$ B) $4\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{6}$

D) $4\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{5}$

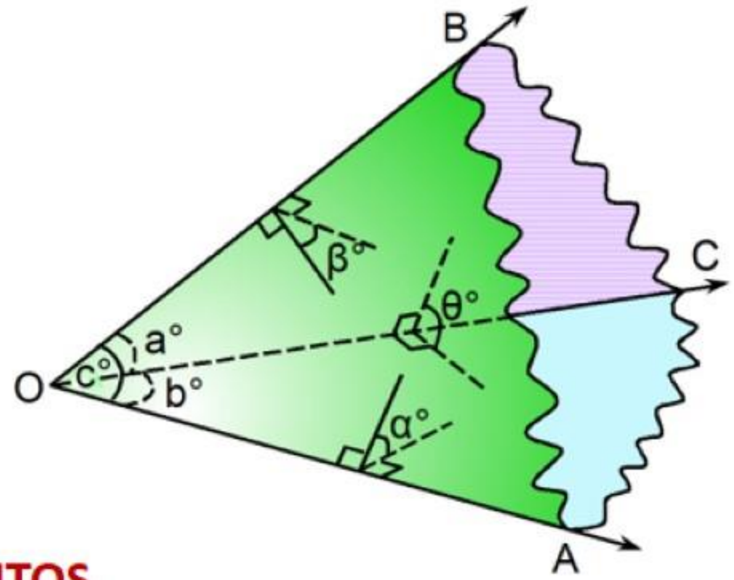
ÁNGULO TRIEDRO

ÁNGULO TRIEDRO

Si por un punto del espacio trazamos tres rayos no coplanares, entonces llamaremos ángulo triedro a la figura geométrica formada por la reunión de los tres rayos y por los interiores de los ángulos que ellos determinan.

El punto, origen común de los rayos, es el vértice del ángulo triedro, los rayos trazados son las aristas y los ángulos determinados por ellos, unidos con sus respectivos interiores, son las caras.

Finalmente, por cada arista hay un diedro determinado por las dos caras adyacente.



ELEMENTOS

Vértice: O

Aristas: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$

Caras: AOB, BOC y AOC

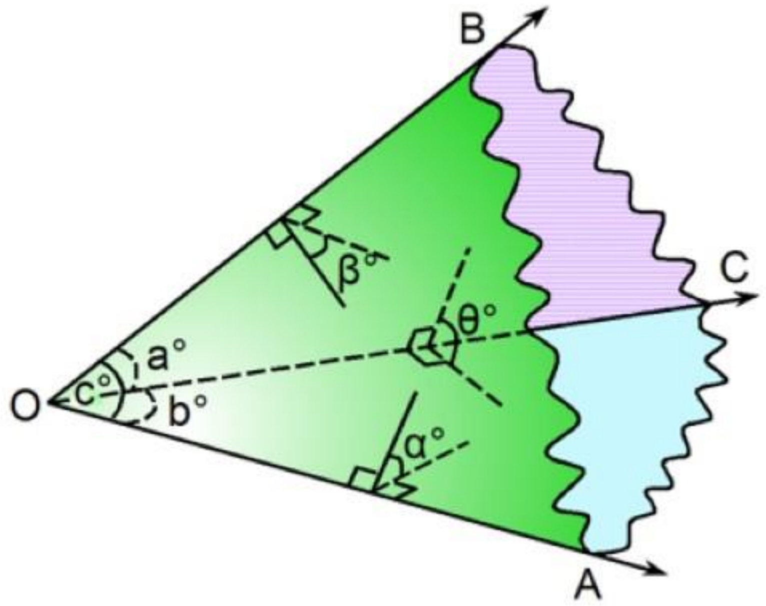
Diedros: Diedro OA, Diedro OB y Diedro OC.

NOTACIÓN

Ángulo triedro O-ABC, o triedro O-ABC

ÁNGULO TRIEDRO

PROPIEDADES



01) $0 < a + b + c < 360$

02) $a - c < b < a + c$

03) $180 < \alpha + \beta + \theta < 540$

04) $\alpha + \beta < 180 + \theta$

05) $a > c \Leftrightarrow \alpha > \theta$

06) $a = c \Leftrightarrow \alpha = \theta$

Demostración 04)

Pasando al polar

$$a' = 180 - \alpha,\ b' = 180 - \beta \ \text{ y } c' = 180 - \theta$$

$$c' < b' + a'$$

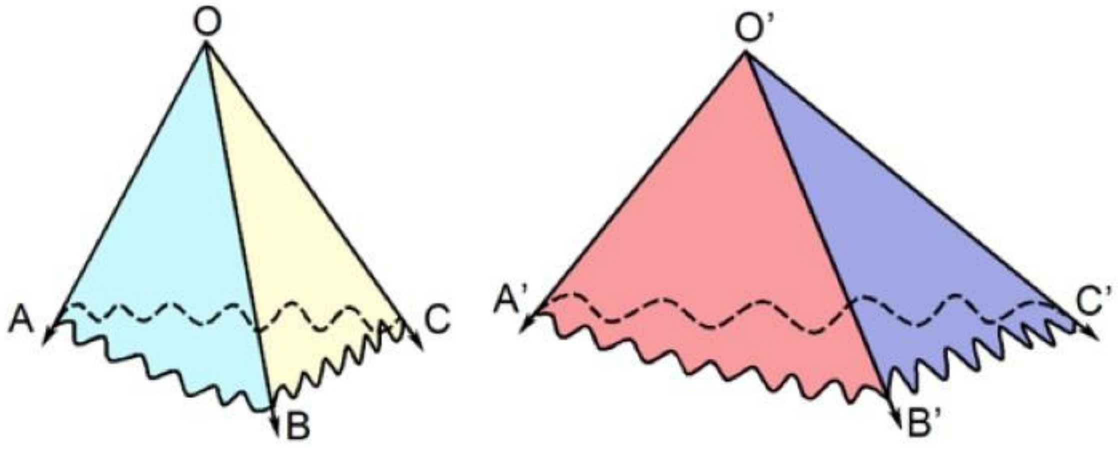
$$180 - \theta < 180 - \beta + 180 - \alpha$$

$$\therefore \alpha + \beta < 180 + \theta$$

ÁNGULO TRIEDRO

TRIEDRO POLAR O SUPLEMENTARIO

Dados dos triedros, se dice que uno de ellos es el triedro polar o suplementario del otro si las medidas de sus caras suman 180 con las medidas de los diedros del otro y viceversa, las medidas de sus diedros suman 180 con las medidas de las caras del otro.



En efecto del gráfico:

$$a + \alpha' = b + \beta' = c + \theta' = 180$$

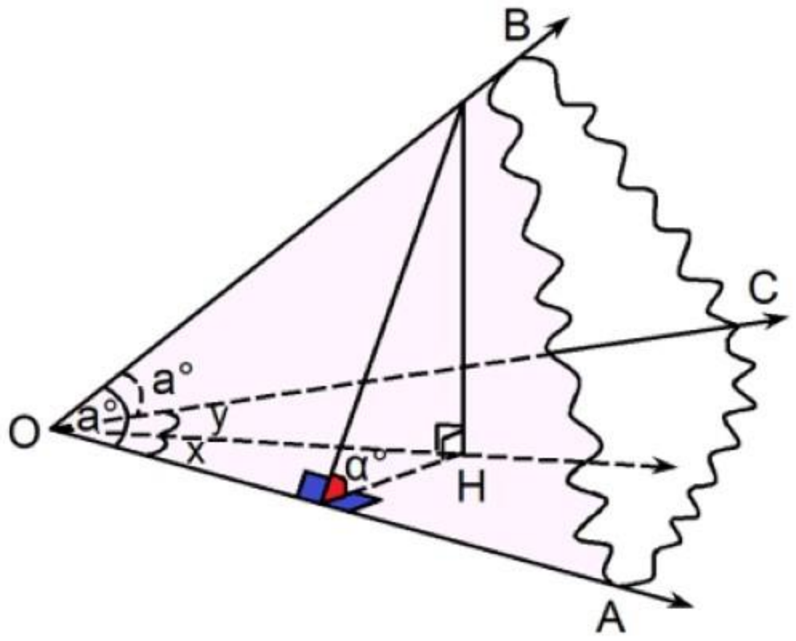
$$\alpha + a' = \beta + b' = \theta + c' = 180$$

ÁNGULO TRIEDRO

CLASIFICACIÓN

a) Triedro Escaleno: si sus tres caras son diferentes.

b) Triedro Isósceles o isoedro: si tiene dos caras congruentes, los diedros opuestos a esas caras también son congruentes.



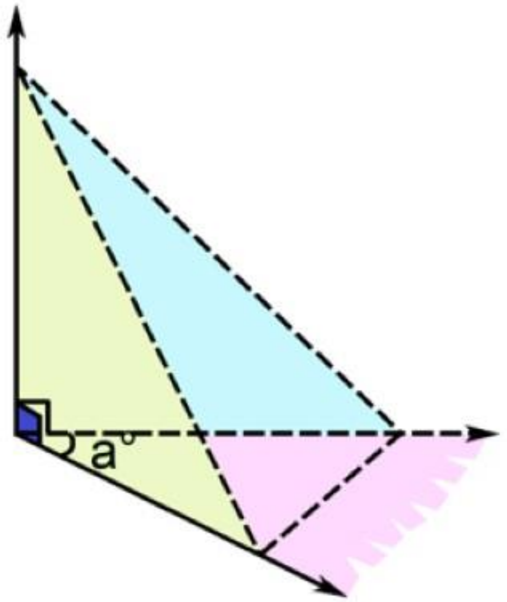
$$x = y$$

c) Triedro Equilátero: si sus tres caras son congruentes, sus tres diedros también.

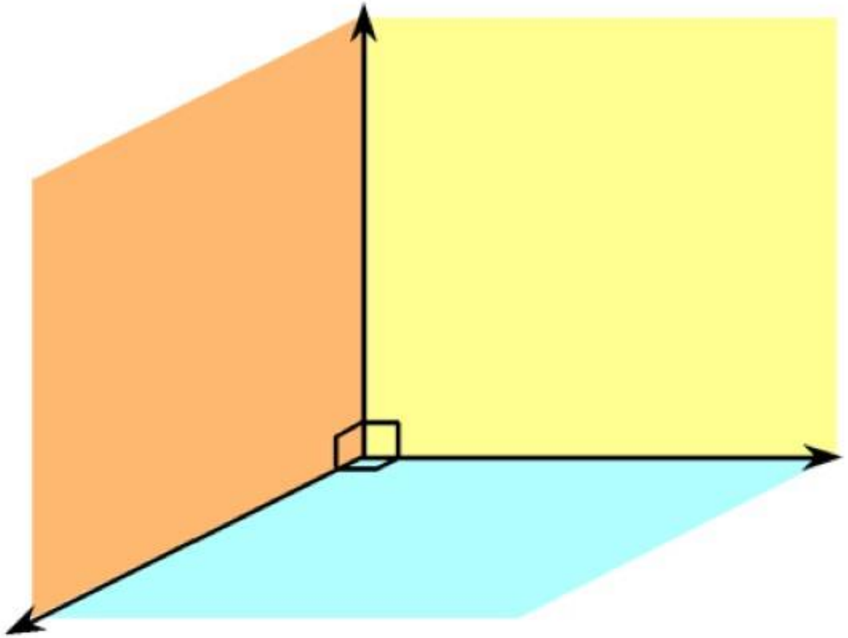
ÁNGULO TRIEDRO

d) Triedro Uni-rectangular: si uno de sus diedros mide 90.

e) Triedro Bi-rectangular: si dos de sus caras miden 90, los diedros opuestos también miden 90.

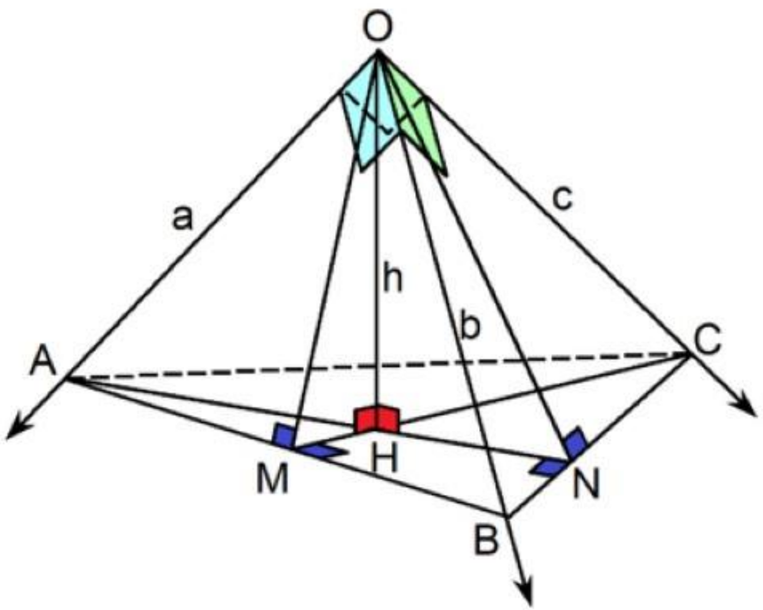


f) Triedro Tri-rectangular: si sus tres caras miden 90, sus tres diedros también miden 90.



ÁNGULO TRIEDRO

TRIEDRO TRIRECTÁNGULO



1) ΔABC: Acutángulo

2) H: Ortocentro del ΔABC

3) $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

4) $(S_{ABC})^2 = (S_{AOB})^2 + (S_{BOC})^2 + (S_{AOC})^2$

Ejemplo

Se tiene un triedro tri-rectangular O-ABC, tal que AB=13, BC=$\sqrt{106}$ y AC=15. Calcular "OA+OB+OC".

A) 22 B) 24 C) 26
D) 32 E) 28

Ejemplo

Las medidas de las caras de un ángulo triedro forman una progresión aritmética de razón "r". Calcular el máximo valor entero de "r".

A) 44 B) 59 C) 89
D) 119 E) 74

Ejemplo

Las caras de un triedro miden 60; 60 y 90, calcular la medida del ángulo que forman esta última cara con la arista opuesta.

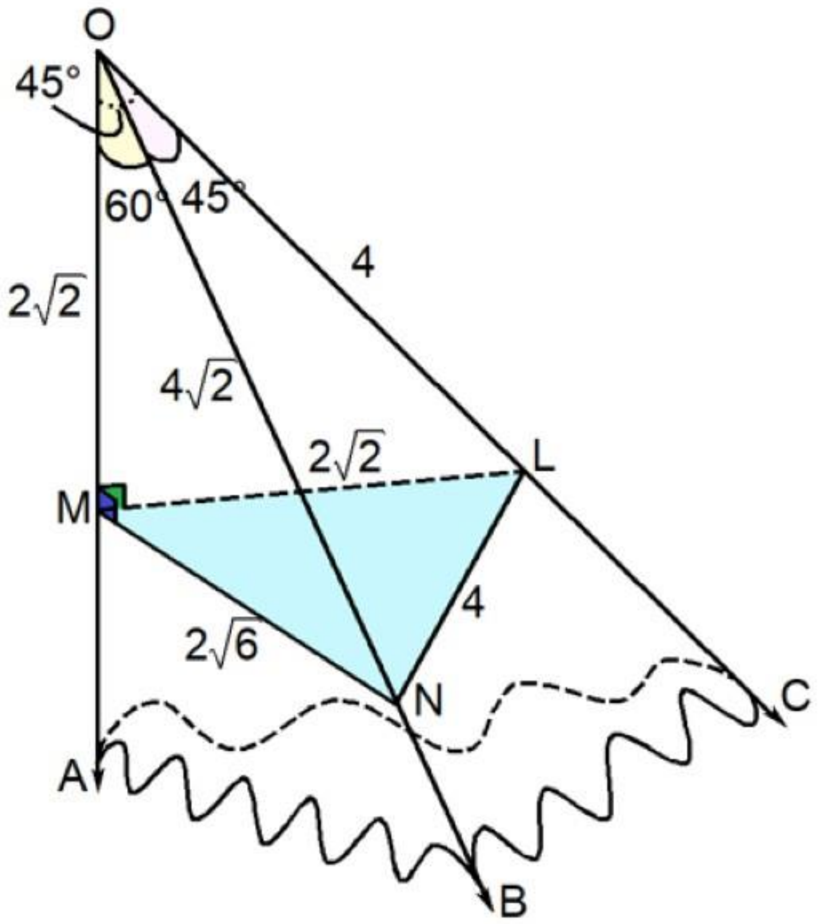
A) 30　　B) 60　　C) 45
D) 75　　E) 15

Ejemplo

Las caras de un triedro miden 45; 45 y 60. En la arista común a las caras congruentes se ubica un punto que dista del vértice 4, y desde él se traza un plano perpendicular a otra arista. Calcular el área de la sección determinada.

A) $2\sqrt{3}$　　B) $8\sqrt{2}$　　C) 6
D) $4\sqrt{2}$　　E) $6\sqrt{3}$

Resolución:



Sea L un punto de la arista OC, por L trazamos el plano perpendicular a la arista OA, determinado en el triedro la sección MNL, cuya área se desea calcular.

Ahora se observa:

En ΔOML (45 y 45): $OM = ML = 2\sqrt{2}$

En ΔOMN (60 y 30): $MN = 2\sqrt{6}$ y $ON = 4\sqrt{2}$

En ΔOLN: $NL = 4$

En el triángulo MNL:

$$(2\sqrt{6})^2 = (2\sqrt{2})^2 + (4)^2$$

Se cumple Pitágoras, lo que significa que el ángulo MLN es recto.

Finalmente: $$S_{MNL} = \frac{2\sqrt{2}.4}{2}$$

$$\therefore S_{MNL} = 4\sqrt{2}$$

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

Ejemplo

Dos caras de un ángulo triedro miden 100 y 130. ¿Entre qué límites se encuentra la tercera cara?

A) 30 y 230 B) 30 y 130 C) 60 y 230
D) 60 y 130 E) 100 y 130

Ejemplo

En un triedro OABC donde las caras AOB y BOC miden 26,5 y el diedro OB mide 90, calcular la medida de la cara AOC.

A) 30 B) 37 C)53
D) 60 E) 45

Ejemplo

O-ABC es un triedro isósceles (los diedros OB y OC son congruentes). Si la medida del diedro OA es 45, entonces ¿entre qué valores puede estar la medida del diedro OB?

A) $68 < \theta < 112$
B) $67 < \theta < 110$
C) $67,5 < \theta < 100$
D) $67,5 < \theta < 112$
E) $67,5 < \theta < 112,5$

Ejemplo

En un triedro OABC, las caras BOC y AOB miden 179 y 79, respectivamente. Si la medida de la cara AOC es un número entero, entonces la medida de dicha cara es:

A) 100 B) 101 C) 102
D) 103 E) 104

PROBLEMAS PROPUESTOS

01. Se tiene dos triángulos equiláteros ABC y ABD ubicados en planos perpendiculares. Calcule la distancia de B al plano CAD, siendo CD=a.

A) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{a\sqrt{5}}{5}$ C) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$

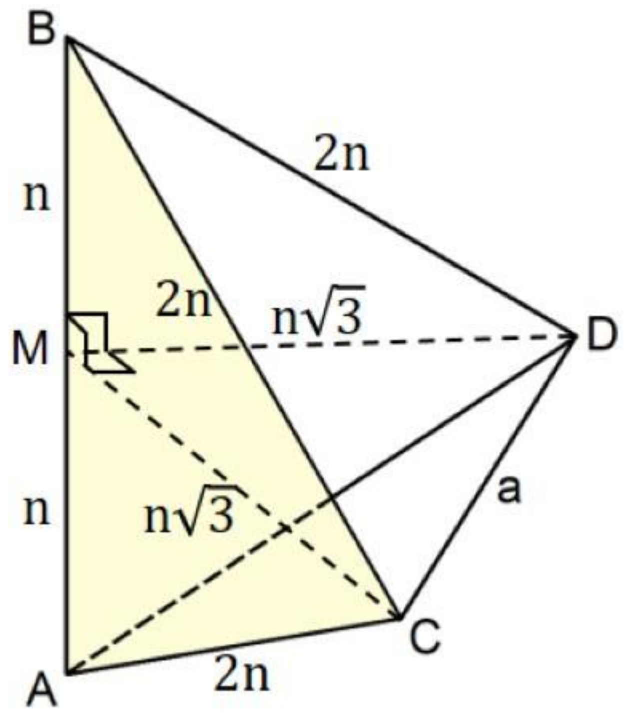
D) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ E) $\frac{a\sqrt{10}}{5}$

Resolución:

Se pide la distancia de B al plano CAD.

En el triángulo ABC trazamos la altura $\overline{CM}$, entonces M es punto medio de $\overline{AB}$. En el triángulo ABD: $\overline{DM}$ será altura. Luego el ángulo CMD será el ángulo rectilíneo del diedro AB, entonces:

$$m\angle CMD = 90$$

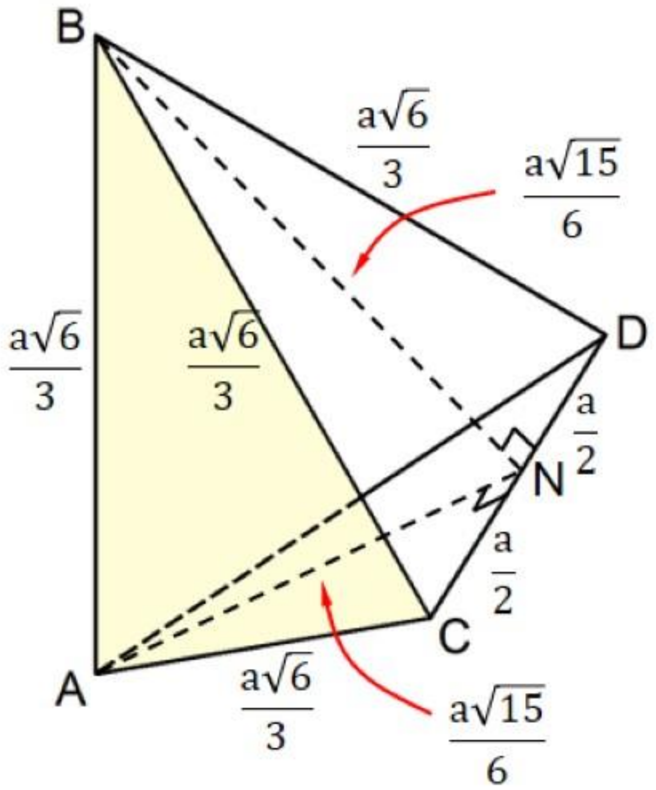


En el triángulo CMD, notable de 45 y 45, se tiene:

$$a = (n\sqrt{3}).\sqrt{2}$$

$$\rightarrow n = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS



En el triángulo isósceles CBD trazamos la altura $\overline{BN}$, entonces N es punto medio de $\overline{CD}$. En el triángulo CAD: $\overline{AN}$ será altura.

Se observa:

$$BN = \frac{a\sqrt{15}}{6} = AN$$

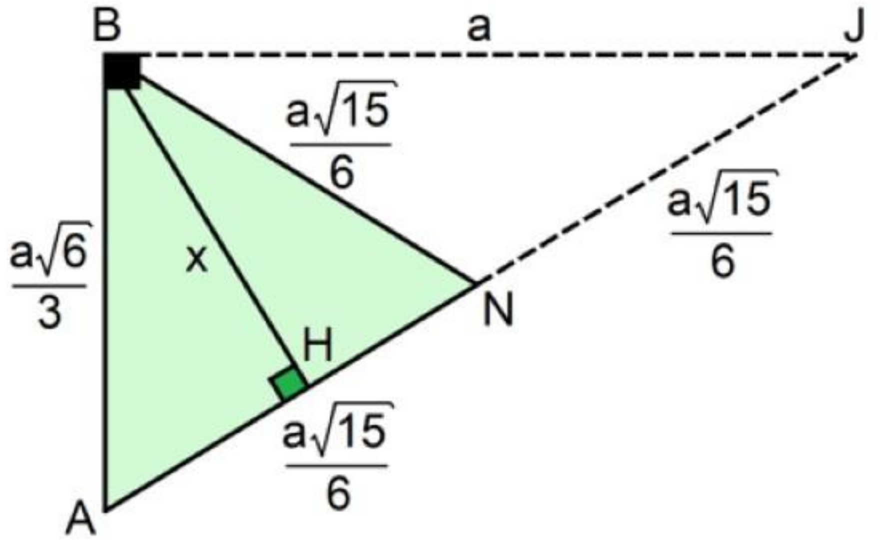
Ahora se observa $\overline{CD}$ es perpendicular al plano del triángulo ANB; luego el plano CAD, que contiene a $\overline{CD}$, será perpendicular al plano ANB.

Finalmente trazamos la altura $\overline{BH}$ del triángulo ABN, que será perpendicular al plano del triángulo CAD, es decir BH=x será la distancia de B al plano del triángulo ACD.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En el triángulo ABN:

Prolongamos $\overline{AN}$ hasta el punto J, de modo que AN=NJ, luego el triángulo ABJ formado será rectángulo (recto en B).



Por Pitágoras en el triángulo ABJ:

$$BJ = a$$

Finalmente, por relaciones métricas en el triángulo ABJ:

$$\frac{a\sqrt{6}}{3}.a = \frac{a\sqrt{15}}{3}.x$$

$$\therefore x = \frac{a\sqrt{10}}{5}$$

Rpta. E

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

02. ABCD es un cuadrado y desde su centro O se traza un segmento $\overline{OE}$ perpendicular al plano ABC, si OE=AB entonces la medida del diedro E–DC–B es:

A) arc tan$\left(\frac{1}{2}\right)$ B) arc tan (1) C) arc tan$\left(\frac{3}{2}\right)$

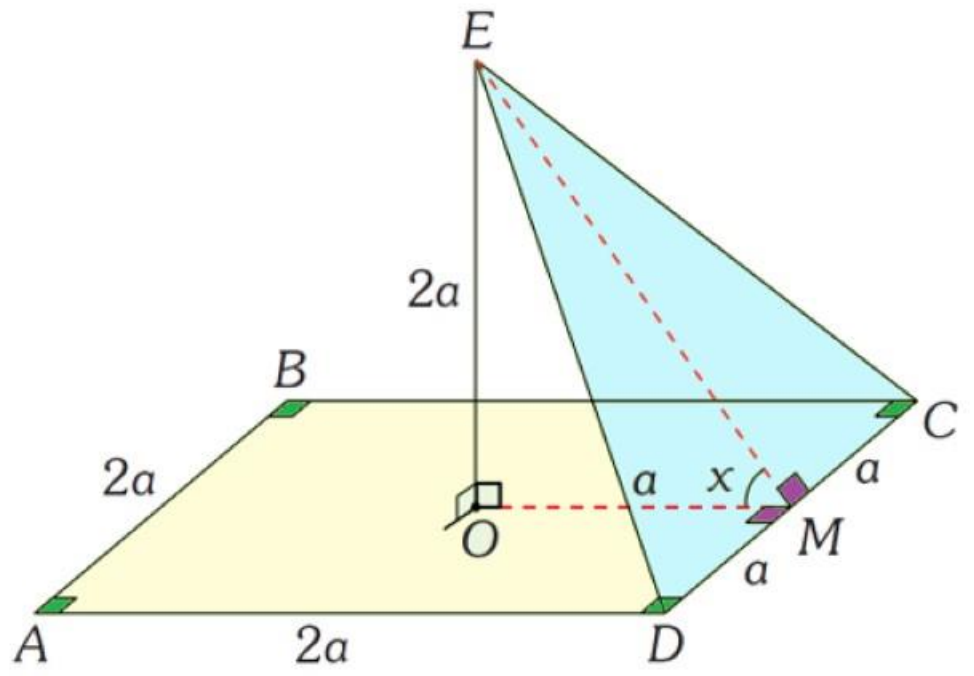
D) arc tan (2) E) arc tan$\left(\frac{5}{2}\right)$ (UNI 2015-1)

Resolución:

Nos piden la medida del diedro E-DC-B=x

Datos: $\overline{OE}$ perpendicular al plano ABC y OE=AB=2a

Trazamos $\overline{OM}$ perpendicular a $\overline{DC}$, luego por el teorema de las tres perpendiculares: $\overline{EM} \perp \overline{DC}$



En el cuadrado ABCD: OM=a

Por último en el triángulo EOM:

$$\tan x = \frac{2a}{a} = 2$$

$$\therefore x = \arctan(2)$$

Rpta. D

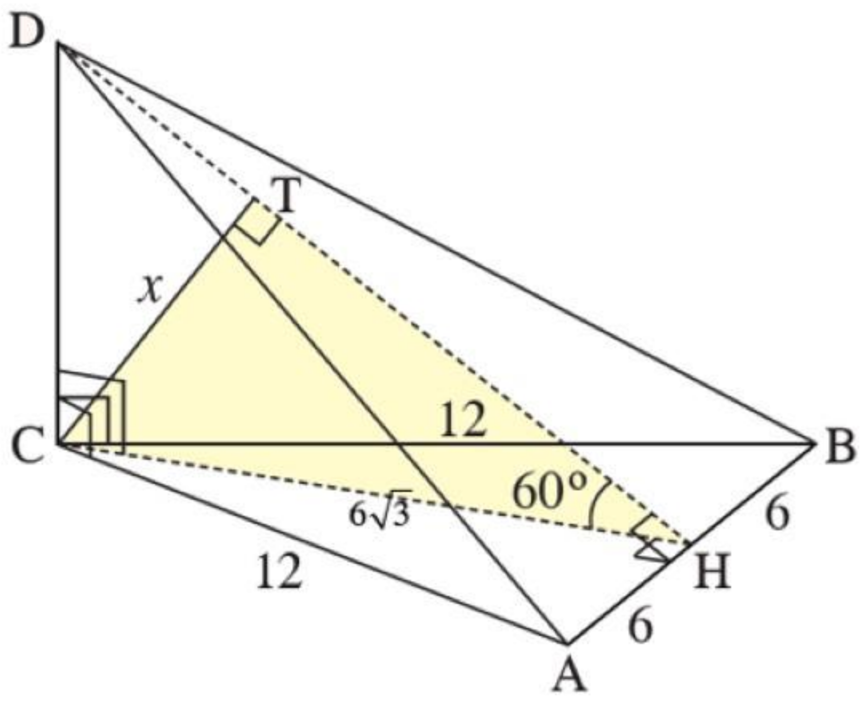
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

03. Se tiene un triángulo equilátero ABC cuyo lado mide 12 m. Por el vértice C se traza $\overline{CD}$ perpendicular al plano que contiene a dicho triángulo. Si el ángulo entre los planos determinados por ABD y ABC es 60°, entonces la distancia de C al plano ABD, en metros, es:

A) 6 B) 7 C) 8

D) 9 E) 10 (UNI 2014-2)

Resolución:



Piden: $d(\text{C}; \Delta \text{ABD}) = x$

ΔABC: equilátero

$\text{AH} = \text{BH} = 6$ y $\text{CH} = 6\sqrt{3}$

⊾CTH (notable de 30° y 60°)

$\therefore x = 9$

Rpta. C

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

04. Se tienen dos planos, P y Q, perpendiculares entre sí, y se cortan según una recta L. La recta que une un punto A de P con un punto B de Q forma con P un ángulo de 30° y con Q de 45°. Calcula la medida de $\overline{AB}$, si la distancia mínima entre la recta L y $\overline{AB}$ es $4(\sqrt{3} - 1)$cm.

A) 4 cm	B) 6 cm	C) 8 cm
D) 10 cm	E) 12 cm	(UNI 2015-2)

Resolución:

Rpta.

05. Un cuadrado ABCD está contenido en un plano P. El punto E es un punto exterior al plano P tal que la región triangular BEC está contenida en un plano perpendicular al plano P. Si BE=EC=AB=ℓ, entonces la medida del ángulo diedro determinado por las regiones EAD y ABCD es:

A) $\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)$ B) $\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{7}\right)$ C) $\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)$

D) $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$ E) $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (5ta PC 2015-1)

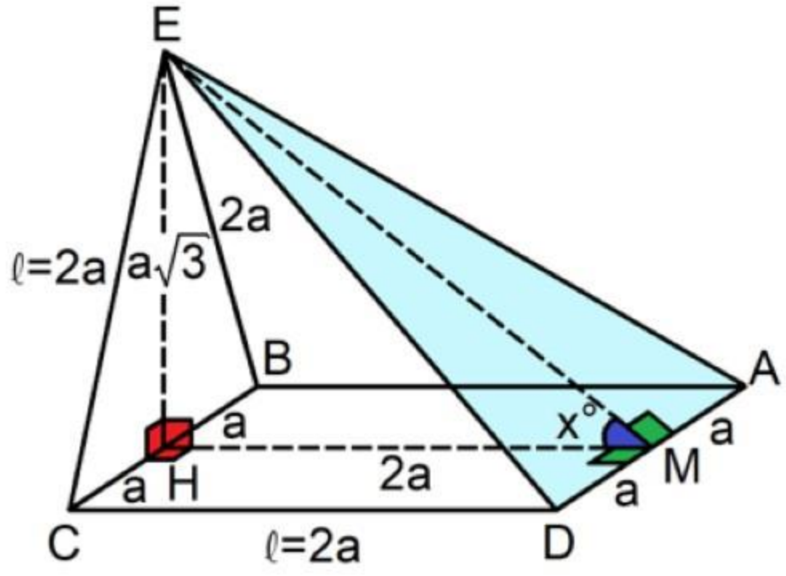
Resolución:

Se pide: mDiedro E-AD-C=x

Por dato: BE=EC=AB= ℓ , sea ℓ =2a

En el triángulo equilátero BEC trazamos la altura $\overline{EH}$, entonces:

$$CH = HB = a \text{ y } EH = a\sqrt{3}$$



Trazamos $\overline{HM} \perp \overline{DA}$, luego por el teorema de las tres perpendiculares:

$$\overline{EM} \perp \overline{DA} \quad \rightarrow m\angle EMH = x$$

Para terminar, en el triángulo rectángulo EHM se observa:

$$\tan x = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \text{Rpta. E}$$

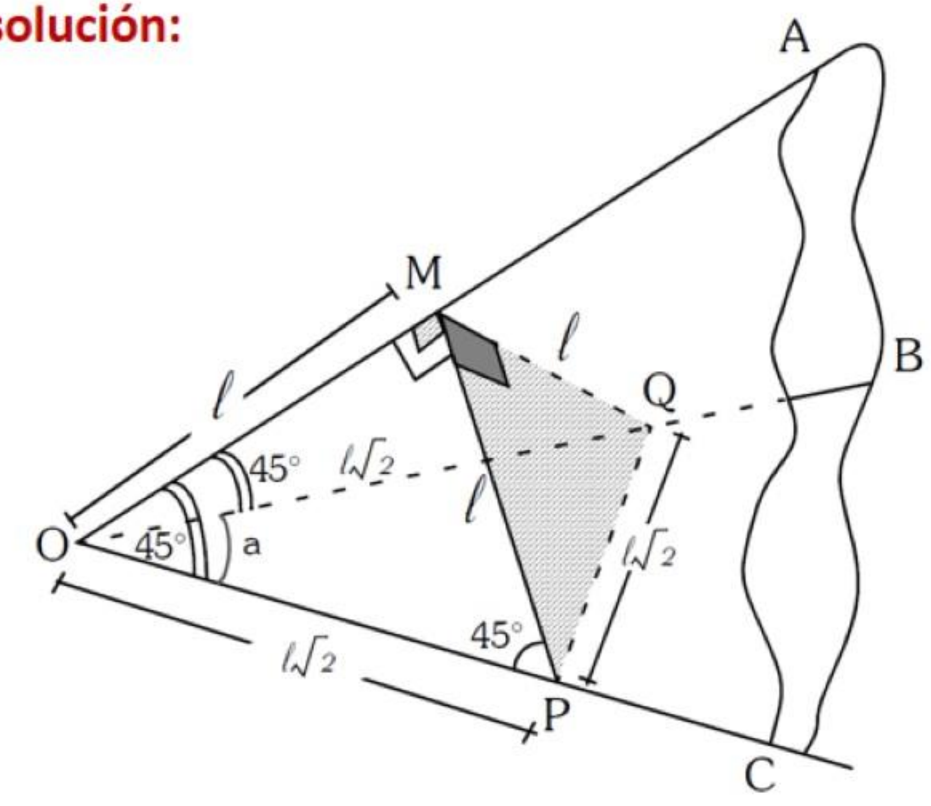
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

06. En un ángulo triedro, dos caras miden 45 y el ángulo diedro entre ellas mide 90. Entonces la otra cara mide:

A) 45 B) 60 C) 75

D) 90 E) 120

Resolución:



i) Se ubica el punto M en la arista $\overleftrightarrow{OA}$, luego se traza $\overline{MP} \perp \overline{OA}$ ($P \in \overleftrightarrow{OC}$) y $\overline{MQ} \perp \overleftrightarrow{OB}$ ($Q \in \overleftrightarrow{OB}$)

ii) Los triángulos OMP y OMQ son rectángulos isósceles congruentes

$OM = MO = MQ = \ell$

iii) ΔPOQ es equilátero

$PO = OQ = PQ = \ell\sqrt{2}$

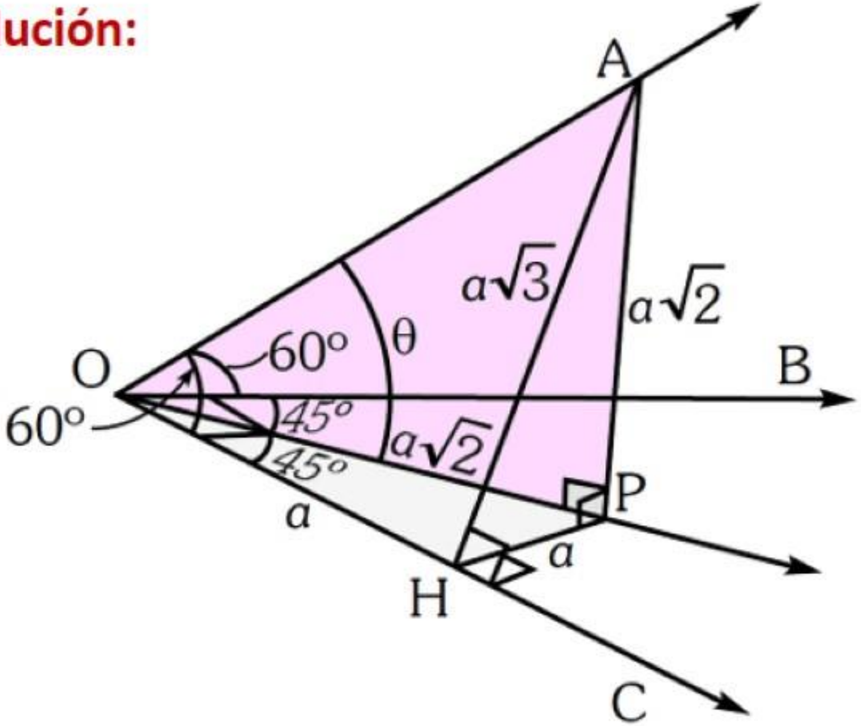
$\therefore\ a = 60°$

Rpta. B

07. En un triedro O-ABC, las caras BOC, AOB y AOC miden 90, 60 y 60 respectivamente. Entonces la tangente del ángulo que determina OA con el plano OBC es:

A) 1/3 B) 1/2 C) 1
D) 2 E) 3 (UNI 2012-I)

Resolución:



Piden: tgθ

Siendo θ: medida del ángulo entre $\overline{OA}$ y la cara BOC

$\overline{OP}$: proyección ortogonal de $\overline{OR}$ sobre la cara BOC

$\overline{OP}$: bisectriz del ∢BOC (teorema de triedro isósceles)

⊿OPH: notable 45° y 45°

⊿AHO: notable 30° y60°

Finalmente ⊿OAP: $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1$

$\therefore \operatorname{tg}\theta = 1$

Rpta. C

08. Un plano interseca a las aristas de un ángulo triedro, de vértice O, en los puntos A, B y C de modo que: m∠AOB=m∠COB=60 y m∠AOC=m∠ABC=90, Si OA+OC=10 cm, calcule OB en cm.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 8

Resolución:

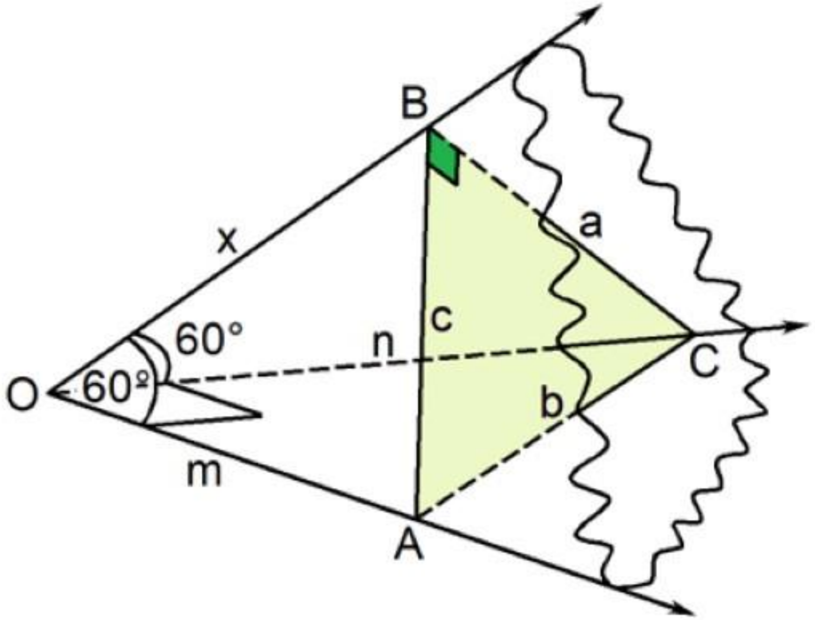
Se pide: OB=x

Dato: $\mathrm{OA} + \mathrm{OC} = 10 \rightarrow \mathrm{m} + \mathrm{n} = 10$

Por teorema del coseno:

En $\Delta\mathrm{AOB}$: $\mathrm{c}^2 = \mathrm{m}^2 + \mathrm{x}^2 - \mathrm{mx}$

En $\Delta\mathrm{COB}$: $\mathrm{a}^2 = \mathrm{n}^2 + \mathrm{x}^2 - \mathrm{nx}$



Por el teorema de Pitágoras:

En $\Delta\mathrm{AOC}$: $\mathrm{b}^2 = \mathrm{m}^2 + \mathrm{n}^2$

En $\Delta\mathrm{ABC}$: $\mathrm{b}^2 = \mathrm{c}^2 + \mathrm{a}^2$

Luego: $\mathrm{c}^2 + \mathrm{a}^2 = \mathrm{m}^2 + \mathrm{n}^2$

$$(\mathrm{m}^2 + \mathrm{x}^2 - \mathrm{mx}) + (\mathrm{n}^2 + \mathrm{x}^2 - \mathrm{nx}) = \mathrm{m}^2 + \mathrm{n}^2$$

$$\therefore \mathrm{x} = \frac{\mathrm{m} + \mathrm{n}}{2}$$

Rpta. C

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

09. En un triedro cada diedro mide 120; entonces la medida de una de sus caras es:

A) $\arccos\left(\frac{2}{3}\right)$ B) $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ C) $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$

D) $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$ E) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

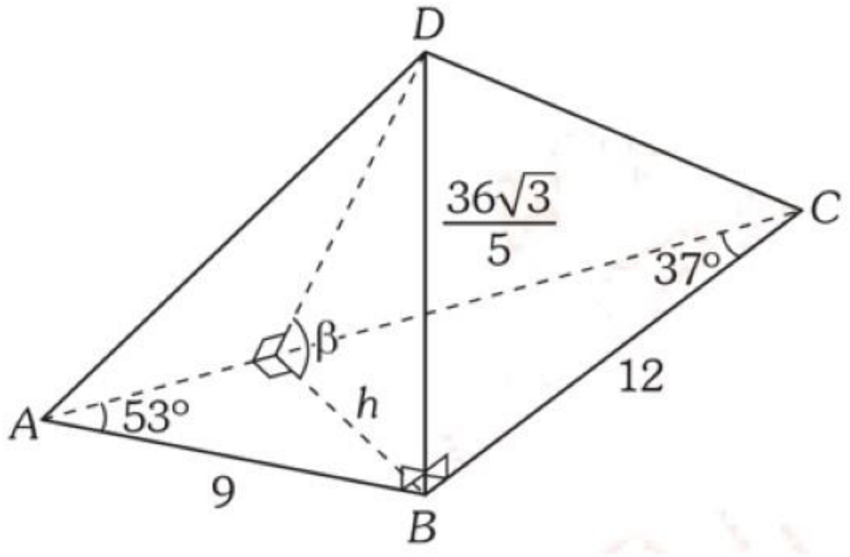
Resolución:

Rpta. C

10. Por el vértice B de un triángulo rectángulo ABC (recto en B), se traza $\overline{BD}$ perpendicular al plano ABC, el punto D se une con los vértices A y C. Si AB=9 u, BC=12 u y BD=$\frac{36\sqrt{3}}{5}$ u, entonces la medida del diedro AC (en grados sexagesimales) es:

A) 37 B) 45 C) 53
D) 54 E) 60 (UNI 2011-1)

Resolución:

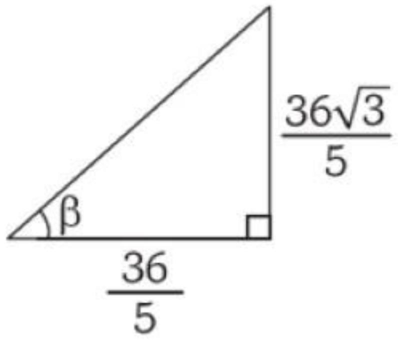


Piden el valor de β.

$\triangle ABC$ (producto de catetos): $9(12)=15h$

$$h=\frac{36}{5}$$

Luego



$\therefore \quad \beta=60°$

Rpta. E

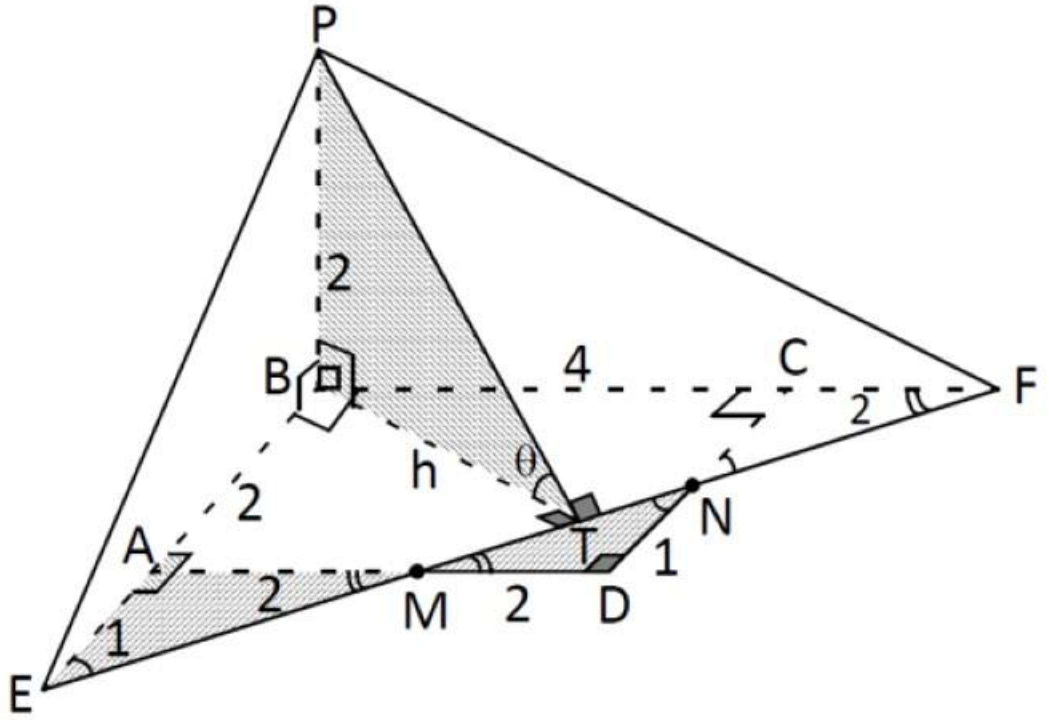
11. Sobre un rectángulo ABCD, desde un punto exterior P, se traza el segmento $\overline{PB}$ perpendicular al plano ABC, M y N son los puntos medios de los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$ respectivamente. Si AB=PB, BC=4 y AB=2, entonces la medida del diedro P-MN-B es:

A) $\operatorname{arctg}(\sqrt{5})$ B) $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ C) $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

D) $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$ E) $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ (UNI 2010-1)

Resolución:

1. Se traza $\overline{BT} \perp \overline{EF}$, entonces por el teorema de la tres perpendiculares $\overline{PT} \perp \overline{EF}$.
2. $\Delta EAM \cong \Delta NDM \cong \Delta NCF$
   $EA = ND = 1$, $AM = DM = CF = 2$



3. En el triángulo rectángulo EBF

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{(BE)^2} + \frac{1}{(BF)^2}$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{(3)^2} + \frac{1}{(6)^2}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{36} = \frac{36+9}{(9)(36)} = \frac{45}{(9)(36)}$$

$$h = \frac{(3)(6)}{\sqrt{45}}$$

$$h = \frac{18}{3\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$h = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

3. En el triángulo PBT

$$\tan\theta = \frac{2}{h}$$

$$\tan\theta = \frac{2}{6/\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{6}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

Rpta. C

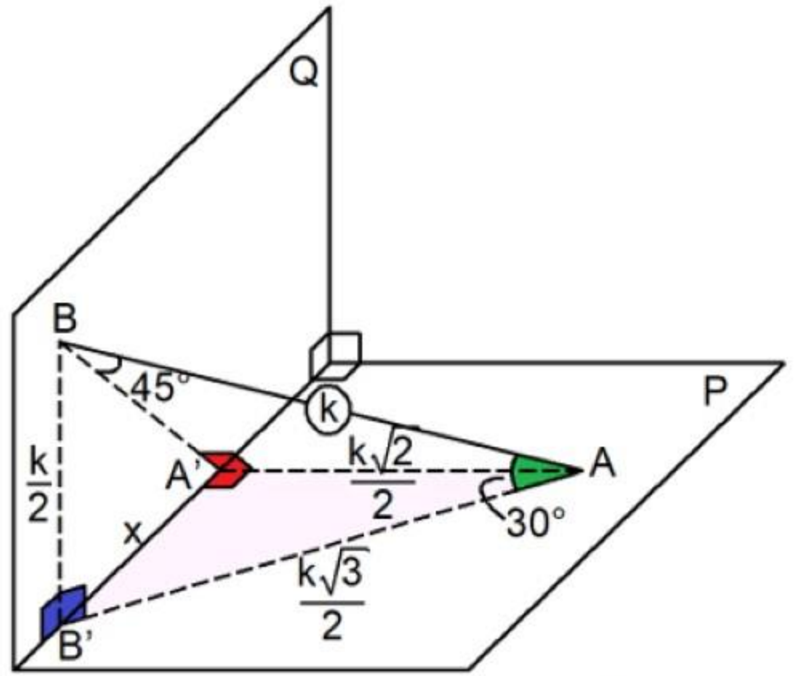
12. Un segmento de longitud "k", tiene sus extremos en dos planos perpendiculares entre sí, y forma con uno de ellos un ángulo que mide 30 y con el otro un ángulo que mide 45. Calcular la distancia entre las proyecciones de los extremos de dicho segmento sobre la intersección de dichos planos.

A) $\frac{k}{2}$ B) $\frac{k\sqrt{6}}{3}$ C) $\frac{k\sqrt{2}}{4}$

D) $\frac{k(\sqrt{3}-1)}{2}$ E) $\frac{k}{4}$

Resolución:

Sean A` y B` las proyecciones de los extremos del segmento $\overline{AB}$ sobre la intersección de dichos planos, entonces se pide: A`B`=x



En $\Delta BB`A$ (notable 30 y 60): $BB` = \frac{k}{2}$ y $AB` = \frac{k\sqrt{3}}{2}$

En $\Delta AA`B$ (notable 45 y 45): $AA` = \frac{k\sqrt{2}}{2}$

Finalmente en el triángulo rectángulo AA`B`:

$$\therefore x = \frac{k}{2}$$

Rpta. A

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

13. En un ángulo triedro O–ABC, sus caras miden: m∠BOC=90, m∠AOC=60 y m∠AOB=60. Entonces, la medida de uno de los ángulos diedros congruentes del ángulo triedro es:

A) arc $\cos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ B) arc $\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ C) 45

D) 60 E) arc $\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Resolución:

Rpta. E

14. En un ángulo triedro O–ABC, el ángulo diedro en la arista $\overline{\mathrm{OA}}$ mide 30 y las caras AOC y AOB miden 30 y 45. Entonces la medida del ángulo BOC es:

A) arc $\cos\left(\frac{2}{7}\right)$ B) arc $\cos\left(\frac{3}{8}\right)$ C) arc $\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

D) arc $\cos\left(\frac{3\sqrt{6}}{8}\right)$ E) arc $\cos\left(\frac{1}{3}\right)$

Resolución:

Rpta. D

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

15. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. El plano determinado por un ángulo plano de un ángulo diedro es perpendicular a su arista.

II. Todo ángulo diedro es un conjunto convexo.

III. Existe un punto que no pertenece a un ángulo diedro que equidista de sus caras y de su arista.

A) FFV B) VVF C) VFV

D) VFF E) VVV

Resolución:

Rpta. D

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

16. Sean dos planos P y Q que forman un ángulo diedro cuya medida es 60. En un plano P se ubica una región cuadrada de área 36 u^2. Si la proyección de la región cuadrada sobre el plano Q es una región limitada por un rombo, entonces la longitud (en u) del lado del rombo es:

A) $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ B) $4\sqrt{10}$ C) $6\sqrt{10}$
D) $8\sqrt{10}$ E) $10\sqrt{10}$

Resolución:

Rpta. C

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

17. Dos regiones rectangulares congruentes ABCD y ABC'D' forman un ángulo diedro que mide 60. Si AD=2(AB), calcular la medida del ángulo que determinan las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD'}$.

A) arc cos$\left(-\frac{1}{5}\right)$ B) arc cos$\left(-\frac{2}{5}\right)$ C) arc cos$\left(\frac{3}{5}\right)$

D) 30 E) 45

Resolución:

Rpta. A

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

18. Se tiene un cuadrado ABCD y un triángulo equilátero ABP ubicados en planos perpendiculares, calcular la medida del ángulo diedro que forman los planos de los triángulos AMD y MBC, siendo M el punto medio de $\overline{\mathrm{BP}}$.

A) 45 B) 60 C) 75
D) 90 E) 110

Resolución:

Rpta. D

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

19. Las regiones triangulares equiláteras ABC y ABD determinan un diedro de 60°. Si $\mathrm{AB} = 2\sqrt{7}$ u, entonces la distancia entre los puntos medios de $\overline{\mathrm{AC}}$ y $\overline{\mathrm{BD}}$ (en u) es:

A) 3 B) 3,5 C) 4
D) 4,5 E) 5

Resolución:

Rpta. B

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

20. En un ángulo triedro O–ABC tal que m∠AOB=m∠AOC=45, m∠BOC=60 y OA=8 u calcule la longitud de la proyección de $\overline{OA}$ sobre la cara BOC.

A) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ B) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ C) $\frac{8\sqrt{6}}{3}$

D) $\sqrt{6}$ E) $2\sqrt{6}$

Resolución:

Rpta. C

FIN

MUCHAS
GRACIAS